Total number of printed pages-04

2(Sem-8/FYUGP)BNC(A)/DSCI

2025

MATHEMATICS

(Discipline Specific Core)

Paper Name: Calculus

Paper Code: **MAT-DSC-142**

Full Marks: 60

Time: Two and Half Hours

(*The figures in the margin indicate full marks for the questions)*

*Answer **either** in English **or** in Assamese*

1. **Answer the following questions:** **1x7=7**

তলৰ প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ দিয়া :

(a) If $\lim_{x \to a} f(x)=1$ and $\lim_{x \to a} g(x)=2$, find $\lim_{x \to a}[3f(x)+2g(x)]$

যদি $\lim_{x \to a} f(x)=1$আৰু $\lim_{x \to a} g(x)=2$, তেন্তে $\lim_{x \to a}[3f(x)+2g(x)]$ ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা ।

(b) For what values of x, $f(x)$ is discontinuous, where

$$f(x) = \frac{x^2-16}{x^2-5x+4}$$

x ৰ কি মানৰ ববে $f(x)$ ফলনটো বিচ্ছিন্ন, য'ত $f(x) = \frac{x^2-16}{x^2-5x+4}$

(c) If $y = e^{ax}$, find y_n.

যদি $y = e^{ax}$, তেন্তে y_nৰ মান নিৰ্ণয় কৰা ।

(d) State Leibnitz's theorem on n^{th} derivative of product of two functions.

দুটা ফলনৰ পূৰণৰ nতম অৱকলজৰ ক্ষেত্ৰত লেইবনিটজৰ উপপাদ্যটো লিখা ।

(e) State Lagrange's mean value theorem for a function f defined on an interval [a,b] .

[a,b] অন্তৰালত সংজ্ঞাবদ্ধ f ফলনটোৰ বৱে লাগ্ৰাঞ্জৰ মধ্যমান উপপাদ্যৰ উক্তি লিখা ।

(f) Find the domain of f defined as

$$f(x, y, z) = \sqrt{1-x^2-y^2-z^2}$$

$f(x, y, z) = \sqrt{1-x^2-y^2-z^2}$ ফলনটোৰ আদিক্ষেত্ৰ নিৰ্ণয় কৰা ।

(g) If $f\ (x, y) = x^2y^3 + x^4y$, find f_{xx} and f_{yy}.
যদি $f\ (x, y) = x^2y^3 + x^4y$, তেন্তে f_{xx}আৰু f_{yy} নিৰ্ণয় কৰা ।

2. Answer any four from the following questions: 2x4=8
তলৰ প্ৰশ্নবোৰৰ যি কোনো চাৰিটা উত্তৰ দিয়া :

(a) Show that $\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$ does not exist.
দেখুওৱা যে $\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$ স্থিত নহয় ।

(b) Find y_n if $y = Sin5x$
y_n নিৰ্ণয় কৰা যদি $y = Sin5x$

(c) Verify Rolle's theorem for $f(x) = x^2$ in [-1,1] .
[-1,1] অন্তৰালত $f(x) = x^2$ ফলনটোৰ বৰে ৰোলৰ উপপাদ্য সত্যাপন কৰা ।

(d) If $z = (x + y)\varphi(y/x)$, prove that $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z$
যদি $z = (x + y)\varphi(y/x)$, দেখুওৱা যে $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z$

(e) Let $f\ (x, y) = x + 3x^2y^2$, $x(t) = t^2$ and $y(t) = t^3$, find $f\big(x(t), y(t)\big)$.
ধৰা $f\ (x, y) = x + 3x^2y^2$, $x(t) = t^2$ আৰু $y(t) = t^3$, তেন্তে $f\big(x(t), y(t)\big)$ নিৰ্ণয় কৰা ।

3. Answer the following questions- (any three) 5x3=15
তলৰ প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ দিয়া - (যিকোনো তিনিটা)

(a) If f is continuous everywhere, find k and m where

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 5, \ \ x > 2 \\ m(x+1) + k \qquad , -1 < x \le 2 \\ 2x^3 + x + 7, \quad x \le -1 \end{cases}$$

যদি f ফলনটো সকলো বিন্দুত অবিচ্ছিন্ন তেতিয়া k আৰু m ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা য'ত

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 5, \ \ x > 2 \\ m(x+1) + k \qquad , -1 < x \le 2 \\ 2x^3 + x + 7, \quad x \le -1 \end{cases}$$

(b) If $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n x dx$, then prove that $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$
যদি $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n x dx$, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে, $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$

(c) If $y = \cos(msin^{-1}x)$, prove that
$(1 - x^2)y_{n+2} - (2n+1)xy_{n+1} + (m^2 - n^2)y_n = 0$
যদি $y = \cos(msin^{-1}x)$, প্ৰমাণ কৰা যে,
$$(1 - x^2)y_{n+2} - (2n+1)xy_{n+1} + (m^2 - n^2)y_n = 0$$

(d) If $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3), x \in [0,4]$, find c in the Lagrange's mean value theorem.
যদি $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3), x \in [0,4]$, তেন্তে লাগ্ৰাঞ্জৰ মধ্যমান উপপাদ্যৰ পৰা c ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা ।

(e) If $z = f(x,y)$ is a homogenous function of degree n in x and y, prove that:
$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = n(n-1)z$$
যদি $z = f(x,y)$ এটা x আৰু y ৰ n ঘাতৰ সমঘাতীয় ফলন,
প্ৰমাণ কৰা যে, $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = n(n-1)z$

4. Answer the following questions: (any three) 10x3=30
তলৰ প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ দিয়া : (যিকোনো তিনিটা)

(a) (i) Using $\in -\delta$ definition, prove that: 5
$\in -\delta$ সংজ্ঞা ব্যবহাৰ কৰি প্ৰমান কৰা:
$$\lim_{x\to -1}(7x+5) = -2,\ \lim_{x\to 5}(3x) = 15$$

(ii) If the functions f and g are continuous at c , show that
$f+g,\ f-g\ ,\ fg$ are continuous at c . 5
যদি f আৰু g ফলন দুটা c বিন্দুত অবিচ্ছিন্ন হলে, দেখুওৱা যে $f+g, f-g$ আৰু fg, c বিন্দুত অবিচ্ছিন্ন ।

(b) (i) Obtain a reduction formula for $\int tan^n x dx$, hence evaluate $\int tan^6 x dx$ 5
$\int tan^n x dx$ ৰ বাবে এটা হ্ৰাসমান সূত্ৰ উলিওৱা আৰু ইয়াৰ পৰা ৰ $\int tan^6 x dx$ মান নিৰ্ণয় কৰা ।

(ii) If $y = e^{mcos^{-1}x}$, Show that 5
যদি $y = e^{mcos^{-1}x}$ দেখুওৱা যে,
$$(1-x^2)y_{n+2} - (2n+1)xy_{n+1} - (n^2+m^2)y_n = 0$$
Also find $y_n = 0$. লগতে $y_n = 0$ নিৰ্ণয় কৰা ।

(c) (i) Find the Maclaurin's polynomials of orders $n = 0,1,2,3,4$ and then find the nth Maclaurin's polynomial for the function $ln(1+x)$. 5

$ln(1+x)$ ফলনটোৰ বাবে $n = 0,1,2,3,4$ ক্ৰমৰ মেকলৰিনৰ বহুপদ ৰাশি কেইটা আৰু লগতে n তম মেকলৰিনৰ বহুপদ ৰাশিটো নিৰ্ণয় কৰা ।

(ii) If a function f is such that $f'$is continuous in $[a,b]$and derivative in (a,b), then prove that there exists a number c with $a < c < b$ such that: 5

যদি f এটা ফলন যাতে f' ফলনটো $[a,b]$ অন্তৰালত অবিচ্ছিন্ন আৰু (a,b) অন্তৰালত অৱকলনীয়, তেন্তে প্ৰমান কৰা যে c এটা স্ংখ্যা থাকে $(a < c < b)$ যাতে:

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{1}{2}(b-a)^2 f''(\mathrm{c}) .$$

(d) (i) Let $f(x,y) = \sqrt{y+1} + \ln(x^2 - y)$. Find $f(e,0)$and sketch the natural domain of f . 5

(ii) Find $\frac{\partial z}{\partial x}$ and $\frac{\partial z}{\partial y}$ if $z = \frac{xy}{x^2+y^2}$. 5

$\frac{\partial z}{\partial x}$ আৰু $\frac{\partial z}{\partial y}$ নিৰ্ণয় কৰা যদি $z = \frac{xy}{x^2+y^2}$

(e) (i) Find the n^{th} Taylor polynomial for $\frac{1}{x}$ about $x = 1$ and express it in sigma notation. 5

$\frac{1}{x}$ ৰ বাবে, $x = 1$ বিন্দু সাপেক্ষে টেইলৰৰ n তম বহুপদ ৰাশিটো নিৰ্ণয় কৰা আৰু ছিগমাৰ দ্বাৰা প্ৰকাশ কৰা ।

(ii) If $u = log\frac{x^4+y^4}{x+y}$, show by Euler's theorem that 5

যদি $u = log\frac{x^4+y^4}{x+y}$ তেন্তে ইউলাৰৰ উপপাদ্যৰ সহায়ত দেখুওৱা যে,

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 3 .$$

****