ধৰা হ'ল $\vec{v} = \langle 2,3 \rangle$, $\hat{e}_1 = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle$

আৰু $\hat{e}_2 = \left\langle -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle$

$\vec{v}$ ভেক্টৰৰ $\hat{e}_1$ আৰু $\hat{e}_2$ ৰ দিশত ভেক্টৰ উপাংশ আৰু স্কেলাৰ উপাংশ উলিওৱা।

(ii) Find the vector equation of a line in 3-space that passes through the points $P_1\,(2, 4, -1)$ and $P_2\,(5, 0, 7)$. 3

$P_1\,(2, 4, -1)$ আৰু $P_2\,(5, 0, 7)$ বিন্দুৰ মাজেৰে যোৱা ৰেখাডালৰ 3-space ত ভেক্টৰ সমীকৰণ উলিওৱা।

Total number of printed pages–12

1 (Sem–4) MAT 3

2025

MATHEMATICS

Paper : MAT0400304

(Analytical Geometry)

Full Marks : 60

Time : 2½ hours

The figures in the margin indicate full marks for the questions.

1. Answer the following questions : 1×8=8

তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ দিয়া ঃ

(a) Find the form of the equation $3x + 4y = 5$ when the origin is shifted to the point $(3, -2)$.

মূলবিন্দু $(3, -2)$ লৈ স্থানান্তৰ কৰিলে $3x + 4y = 5$ সমীকৰণৰ ৰূপ কি হ'ব উলিওৱা।

(b) Under what condition the equation $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ represents a pair of perpendicular straight lines?

কি চৰ্ত সাপেক্ষে $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ সমীকৰণে দুডাল পৰস্পৰ লম্ব ৰেখা প্ৰতিনিধিত্ব কৰিব?

(c) Write *true* **or** *false* (শুদ্ধ নে অশুদ্ধ লিখা) :

The degree of an equation is an invariant under orthogonal transformation.

লাম্বিক ৰূপান্তৰ সাপেক্ষে এটা সমীকৰণৰ মাত্ৰা অপৰিবৰ্ত্তনীয়।

(d) Find the nature of the conic represented by polar equation $\frac{1}{r} = 8 + 5\cos\theta$.

ধ্ৰুৱীয় সমীকৰণ $\frac{1}{r} = 8 + 5\cos\theta$ ই নিৰ্দেশ কৰা শাংকৱটো কি হয় উলিওৱা।

(e) The axes are rotated through an angle of 60° without change of origin. The co-ordinates of a point are $(4, \sqrt{3})$ in the new system. Find the co-ordinates in the old system.

মূলবিন্দু পৰিৱৰ্ত্তন নকৰাকৈ অক্ষদ্বয়ক 60° কোণত ঘূৰোৱা হ'ল। নতুন অক্ষ সাপেক্ষে এটা বিন্দুৰ স্থানাংক $(4, \sqrt{3})$। পুৰণি অক্ষ সাপেক্ষে বিন্দুটোৰ স্থানাংক উলিওৱা।

(f) Write down the equations of the asymptotes of the hyperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ পৰাবৃত্তটোৰ অনন্তস্পৰ্শী ৰেখাৰ সমীকৰণ লিখা।

(g) Find the norm of the vector $\vec{v} = -3\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$

$\vec{v} = -3\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ ভেক্টৰৰ নৰ্ম (norm) উলিওৱা।

(h) Find the volume of the parallelopiped whose adjacent edges are

$\vec{u} = 3\hat{i} - 2\hat{j} - 5\hat{k}$, $\vec{v} = \hat{i} + 4\hat{j} - 4\hat{k}$,

$\vec{w} = 3\hat{j} + 2\hat{k}$.

$\vec{u} = 3\hat{i} - 2\hat{j} - 5\hat{k}$, $\vec{v} = \hat{i} + 4\hat{j} - 4\hat{k}$,

$\vec{w} = 3\hat{j} + 2\hat{k}$ সংলগ্ন বাহুবিশিষ্ট parallelopiped টোৰ ঘনমান উলিওৱা।

2. Answer the following questions : 2×6=12

তলৰ দিয়াবোৰৰ প্ৰশ্নসমূহৰ উত্তৰ লিখা ঃ

(a) Reduce the equation $2x + 3y - 6 = 0$ in the form $lx + my = 0$ by choice of new origin on the $x-$axis.

x -অক্ষত নতুন মূলবিন্দু স্থিৰ কৰি $2x + 3y - 6 = 0$ সমীকৰণটো $lx + my = 0$ আকাৰলৈ লঘুকৃত কৰা।

(b) For what value of k does the equation $xy + 5x + ky + 15 = 0$ may represent a pair of straight lines.

k ৰ কি মানৰ বাবে $xy + 5x + ky + 15 = 0$ সমীকৰণটোই দুডাল ৰেখাখণ্ড নির্দেশ কৰিব?

(c) Find the equation of the diameter of the ellipse $3x^2+4y^2=5$ conjugate to $y + 3x = 0$.

$3x^2+4y^2=5$ উপবৃত্তটোৰ $y + 3x = 0$ ব্যাসৰ সংযোজক (conjugate) ব্যাসডালৰ সমীকৰণ উলিওৱা।

(d) Find the equation of the cone whose vertex is the origin and which passes through the curve of intersection of the plane $lx + my + nz = p$ and the surface $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$.

মূলবিন্দু শীৰ্ষবিন্দুবিশিষ্ট আৰু $lx + my + nz = p$ সমতল আৰু $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ পৃষ্ঠৰ বক্ৰীয় ছেদাংশৰ মাজেৰে যোৱা শংকুটোৰ সমীকৰণ উলিওৱা।

(e) A force $\vec{F} = 3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ lb is applied to a point that moves on a line from $P(-1, 1, 2)$ to $Q(3, 0, -2)$. If the distance is measured in feet, how much work is done?

$\vec{F} = 3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ lb বল প্ৰয়োগ কৰি এটা বিন্দু $P(-1, 1, 2)$ ৰ পৰা $Q(3, 0, -2)$ লৈ স্থানান্তৰ কৰা হ'ল। দূৰত্বৰ মাপ ফুটত (feet) হ'লে কিমান কাৰ্য্য সম্পাদন কৰা হ'ল উলিওৱা।

(f) Find the centre and radius of the sphere $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 8z + 17 = 0$.

$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 8z + 17 = 0$ গোলকটোৰ কেন্দ্ৰবিন্দু আৰু ব্যাসাৰ্দ্ধ উলিওৱা।

3. Answer **_any four_** parts : 5×4=20

যিকোনো চাৰিটা অংশৰ উত্তৰ কৰা ঃ

(a) Prove that $a + b$ and $ab - h^2$ obtained from $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c$ remain invariant under transformation of rotation.

প্ৰমাণ কৰা যে,

$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c$ ৰ পৰা প্ৰাপ্ত $a + b$ আৰু $ab - h^2$ ৰাশি দুটা ঘূৰ্ণীয় ৰূপান্তৰ সাপেক্ষে অপৰিবৰ্ত্তনীয় হৈ থাকে।

(b) Prove that the straight lines represented by the equation $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ will be equidistant from origin if

$$f^4 - g^4 = c\left(bf^2 - ag^2\right).$$

প্ৰমাণ কৰা যে,

$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ সমীকৰণে প্ৰতিনিধিত্ব কৰা ৰেখা দুডাল মূলবিন্দুৰ পৰা সমদূৰত্বত থাকিব যদিহে

$$f^4 - g^4 = c\left(bf^2 - ag^2\right).$$

(c) If PSP' and QSQ' are two perpendicular focal chords of a conic, prove that

$$\frac{1}{PP'}+\frac{1}{QQ'} = \text{a constant.}$$

PSP' আৰু QSQ' এটা শাংকৱৰ দুডাল পৰস্পৰ লম্ব নাভীয় জ্যা হ'লে প্ৰমাণ কৰা যে, $\frac{1}{PP'}+\frac{1}{QQ'}=$ ধ্ৰুৱক

(d) Show that the line $lx+my=n$ is a tangent to the parabola $y^2=4ax$ if $ln = am^2$.

দেখুওৱা যে, $lx+my=n$ ৰেখাডাল $y^2=4ax$ অতিবৃত্তৰ স্পৰ্শক হব যদিহে $ln = am^2$.

(e) Find the coordinates of the centre and radius of the circle— 3+2=5

$x+2y+2z=15$,
$x^2+y^2+z^2-2y-4z-11=0$.

$x+2y+2z=15$,
$x^2+y^2+z^2-2y-4z-11=0$

বৃত্তৰ কেন্দ্ৰবিন্দুৰ স্থানাংক আৰু ব্যাসাৰ্দ্ধ উলিওৱা।

(f) Find the equation of the right circular cylinder of radius 5 whose axis passes through $(1, 2, 3)$ and is parallel to

$$\frac{x-4}{2}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z-2}{2}.$$

5 ব্যাসাৰ্দ্ধবিশিষ্ট এটা সোঁ বৃত্তাকাৰ চিলিণ্ডাৰৰ সমীকৰণ উলিওৱা যাৰ অক্ষ (1, 2, 3) বিন্দুৰ মাজেৰে যায় আৰু $\frac{x-4}{2}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z-2}{2}$ ৰেখাৰ সমান্তৰাল হয়।

(g) Find the orthogonal projection of $\vec{v}=\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$ on $\vec{b}=2\hat{i}+2\hat{j}$

Also find the vector component of $\vec{v}$ orthogonal to $\vec{b}$. 3+2=5

$\vec{v}=\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$ ভেক্টৰৰ $\vec{b}=2\hat{i}+2\hat{j}$ ৰ ওপৰত লম্বীয় প্ৰক্ষেপ উলিওৱা। লগতে $\vec{b}$ ৰ লম্ব হোৱা $\vec{v}$ ভেক্টৰৰ ভেক্টৰ উপাংশ উলিওৱা।

(h) Show that the lines

$L_1 : x = 2+t,\ y=2+3t,\ z=3+t$
$L_2 : x = 2+t,\ y=3+4t,\ z=4+2t$

intersect and find the point of intersection. 3+2=5

দেখুওৱা যে

$L_1 : x = 2+t,\ y=2+3t,\ z=3+t$
$L_2 : x = 2+t,\ y=3+4t,\ z=4+2t$

ৰেখা দুডালে পৰস্পৰক ছেদ কৰে আৰু ছেদবিন্দুৰ স্থানাংক উলিওৱা।

Contd.

4. Answer ***any two*** parts : 10×2=20

যিকোনো দুটা অংশৰ উত্তৰ কৰা ঃ

(a) *(i)* Find the equations of the following when $ax+by+c=0$ and $bx-ay+d=0$ are considered as axes of x and y respectively

I. $(bx-ay+d)^2 = a^2+b^2$

II. $(ax+by+c).(bx-ay+d) = a^2+b^2$

5

$ax+by+c=0$ আৰু $bx-ay+d=0$ ৰেখা দুডালক ক্ৰমে x অক্ষ আৰু y অক্ষ হিচাপে লৈ তলৰ সমীকৰণ কেইটা কি হব উলিওৱা —

I. $(bx-ay+d)^2 = a^2+b^2$

II. $(ax+by+c).(bx-ay+d) = a^2+b^2$

(ii) Find the equations of the bisectors of the angles between the lines $ax^2+2hxy+by^2=0$. 5

$ax^2+2hxy+by^2=0$ ৰেখাদ্বয়ৰ মাজৰ কোণৰ সমদ্বিখণ্ডকৰ সমীকৰণ উলিওৱা।

(b) *(i)* Prove that the tangents at the ends of a pair of conjugate diameters of the ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ form a parallelogram of constant area. 5

প্ৰমাণ কৰা যে, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তৰ এযোৰ সংযোজক ব্যাসৰ (conjugate diameters) প্ৰান্তবিন্দুত টনা স্পৰ্শকবোৰে এটা সামন্তৰিক সৃষ্টি কৰে যাৰ আয়তন এটা ধ্ৰুৱক হয়।

(ii) The plane $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ meets the co-ordinate axes in A, B, C. Prove that the equation to the cone generated by lines drawn from O to meet circle ABC is

$$\left(b/c+c/b\right)yz+\left(c/a+a/c\right)zx+\left(a/b+b/a\right)xy=0.$$

5

$x/a+y/b+z/c=1$ সমতলে অক্ষত্ৰয়ক A,B,C বিন্দুত ছেদ কৰে। প্ৰমাণ কৰা যে, মূল বিন্দু O ৰ পৰা ABC বৃত্তলৈ অংকণ কৰা ৰেখা সমূহে উৎপন্ন কৰা শংকুৰ সমীকৰণ

$$\left(b/c+c/b\right)yz+\left(c/a+a/c\right)zx+\left(a/b+b/a\right)xy=0.$$

(c) State the type of the conic and reduce it to canonical form :
$11x^2 - 4xy + 14y^2 - 58x - 44y + 71 = 0.$
2+8=10

তলৰ শাংকৰটোৰ প্ৰকাৰ উল্লেখ কৰা আৰু ইয়াক canonical ৰূপলৈ সৰলীকৃত কৰা ঃ
$11x^2 - 4xy + 14y^2 - 58x - 44y + 71 = 0$

(d) (i) A plane passes through a fixed point (p, q, r) and cuts the axes in A, B, C. Show that the locus of the centre of the sphere $OABC$ is

$$\frac{p}{x} + \frac{q}{y} + \frac{r}{z} = 2.$$ 4

এখন সমতল এটা নিৰ্দিষ্ট বিন্দু (p, q, r) ৰ মাজেৰে যায় আৰু অক্ষক A, B, C বিন্দুত ছেদ কৰে। প্ৰমাণ কৰা যে $OABC$ গোলকৰ কেন্দ্ৰৰ সঞ্চাৰপথ হ'ল

$$\frac{p}{x} + \frac{q}{y} + \frac{r}{z} = 2$$

(ii) Find the cylindrical co-ordinates of a point whose cartesian co-ordinates are $\left(1, \sqrt{3}, 2\right)$. 2

এটা বিন্দুৰ কাৰ্টেজীয় স্থানাংক $\left(1, \sqrt{3}, 2\right)$ হ'লে বিন্দুটোৰ নলীয় স্থানাংক উলিওৱা।

(iii) Find the distance between the points whose spherical co-ordinates are

$$\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}\right) \text{ and } \left(2, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right).$$ 4

$$\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}\right) \text{ আৰু } \left(2, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$$

গোলকীয় স্থানাংক বিশিষ্ট বিন্দু দুটাৰ মাজৰ দূৰত্ব উলিওৱা।

(e) (i) Find the angle between a diagonal of a cube and one of it's edge. 3

এটা ঘনকৰ এডাল কৰ্ণ আৰু এটা দাঁতি (edge)ৰ মাজৰ কোণটো উলিওৱা।

(ii) Let $\vec{v} = \langle 2, 3 \rangle$, $\hat{e}_1 = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle$ and $\hat{e}_2 = \left\langle -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle$
Find the scalar components and vector components of $\vec{v}$ along $\hat{e}_1$ and $\hat{e}_2$. 4