# 2024

## MATHEMATICS

Paper : MAT0300104

**( Ordinary Differential Equation )**

*Full Marks* : 60

*Time* : 2½ hours

*The figures in the margin indicate full marks for the questions*

**1.** Answer the following questions : 1×8=8

তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ কৰা :

(a) Write the order of the following differential equation :

তলত দিয়া অৱকল সমীকৰণটোৰ মাত্ৰা লিখা :

$$\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 = \sqrt{\frac{d^2r}{ds^2}+1}$$

(b) State whether the following equation is linear or nonlinear :

তলৰ সমীকৰণটো ৰৈখিক নে অৰৈখিক উল্লেখ কৰা :

$$\frac{d^6x}{dt^6}+\left(\frac{d^4x}{dt^4}\right)\left(\frac{d^3x}{dt^3}\right)+x=t$$

(c) Define integral curves of a first-order differential equation.

এটা প্ৰথম-মাত্ৰাৰ অৱকল সমীকৰণৰ অখণ্ড বক্ৰ (integral curve)ৰ সংজ্ঞা দিয়া।

(d) Write the general form of a Bernoulli differential equation.

এটা বাৰ্ণলী অৱকল সমীকৰণৰ সাধাৰণ ৰূপটো লিখা।

(e) Find the integrating factor of the linear differential equation

$$\frac{dy}{dx}+\frac{3y}{x}=6x^2$$

ৰৈখিক অৱকল সমীকৰণ $\frac{dy}{dx}+\frac{3y}{x}=6x^2$ ৰ অনুকলন গুণক উলিওৱা।

(f) Evaluate :

নিৰ্ণয় কৰা :

$$W(e^x, e^{-x})$$

(g) Write down the UC set of the UC function $x^n e^{ax}$.

$x^n e^{ax}$ UC ফলনটোৰ UC সংহতিটো লিখা।

(h) Define an exact differential equation.

এটা যথাৰ্থ অৱকল সমীকৰণৰ সংজ্ঞা দিয়া।

2. Answer any *six* of the following questions : $2\times6=12$

তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ যি কোনো ছয়টাৰ উত্তৰ কৰা :

(a) For certain values of the constant $m$ the function $f$ defined by $f(x)=e^{mx}$ is a solution of the differential equation

$$\frac{d^3y}{dx^3}-4\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}+6y=0$$

Determine all such values of $m$.

ধ্ৰুৱক $m$ ৰ কিছুমান মানৰ বাবে $f(x)=e^{mx}$ ফলনটো

$$\frac{d^3y}{dx^3}-4\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}+6y=0$$

অৱকল সমীকৰণটোৰ এটা সমাধান হয়। $m$ ৰ তেনেকুৱা সকলো মান নিৰ্ণয় কৰা।

(b) Examine whether or not, the differential equation $(3x^2y+2)\,dx-(x^3+y)\,dy=0$ is exact.

$(3x^2y+2)\,dx-(x^3+y)\,dy=0$ অৱকল সমীকৰণটো যথাৰ্থ হয় নে নহয় পৰীক্ষা কৰা।

(c) Find the general solution of

সাধাৰণ সমাধান উলিওৱা

$$\frac{d^2y}{dx^2}-2\frac{dy}{dx}-3y=0$$

(d) Transform the equation

$$(x^2 - 3y^2)dx + 2xydy = 0$$

to a separable equation by appropriate change of variables.

যথাযথ চলক পৰিবৰ্তন কৰি

$$(x^2 - 3y^2)dx + 2xydy = 0$$

অৱকল সমীকৰণটোক এটা পৃথকীকৰণীয় সমীকৰণলৈ ৰূপান্তৰ কৰা।

(e) Show that the functions $e^{-x}$, $e^{3x}$ and $e^{4x}$ are linearly independent.

দেখুওৱা যে $e^{-x}$, $e^{3x}$ আৰু $e^{4x}$ ফলনকেইটা ৰৈখিকভাৱে স্বতন্ত্ৰ।

(f) For the differential equation

$$(4x + 3y^2)dx + 2xydy = 0$$

find an integrating factor of the form $x^n$, where $n$ is a positive integer, so that the equation becomes exact.

$(4x + 3y^2)dx + 2xydy = 0$ অৱকল সমীকৰণটোৰ বাবে $x^n$ আকাৰৰ এটা অনুকলন গুণক উলিওৱা, য'ত $n$ এটা ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা, যাতে সমীকৰণটো যথাৰ্থ হয়।

(g) The roots of the auxiliary equation corresponding to a certain 8th order homogeneous linear differential equation with constant coefficients are

$$4, 4, 4, 4, 2+3i, 2-3i, 2+3i, 2-3i$$

Write the general solution.

ধ্ৰুৱক সহগবিশিষ্ট এটা ৪তম মাত্ৰাৰ সমমাত্ৰিক ৰৈখিক অৱকল সমীকৰণৰ সহায়ক সমীকৰণটোৰ মূলবোৰ হ'ল

$$4, 4, 4, 4, 2+3i, 2-3i, 2+3i, 2-3i$$

সমীকৰণটোৰ সাধাৰণ সমাধান লিখা।

(h) Given that a particular integral of

$$\frac{d^2y}{dx^2}-5\frac{dy}{dx}+6y=1$$

is $y=\frac{1}{6}$ and a particular integral of $\frac{d^2y}{dx^2}-5\frac{dy}{dx}+6y=x$ is $y=\frac{x}{6}+\frac{5}{36}$. Then find the particular integral of

$$\frac{d^2y}{dx^2}-5\frac{dy}{dx}+6y=2-12x$$

দিয়া আছে যে অৱকল সমীকৰণ

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = 1$$ ৰ

বিশেষ অনুকল $y = \frac{1}{6}$ আৰু অৱকল সমীকৰণ $\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = x$ ৰ বিশেষ অনুকল $y = \frac{x}{6} + \frac{5}{36}$. তেন্তে অৱকল সমীকৰণ

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = 2 - 12x$$ ৰ

বিশেষ অনুকল উলিওৱা।

(i) Show that every function $f$ defined by $f(x) = 2 + ce^{-2x^2}$, where c is an arbitrary constant, is a solution of the differential equation

$$\frac{dy}{dx} + 4xy = 8x$$

দেখুওৱা যে $f(x) = 2 + ce^{-2x^2}$ ৰে সংজ্ঞাবদ্ধ সকলোবোৰ ফলন $f$, য'ত c এটা যি কোনো ধ্ৰুৱক হয়,

$$\frac{dy}{dx} + 4xy = 8x$$

অৱকল সমীকৰণটোৰ এটা সমাধান হয়।

(j) The general solution of a second-order homogeneous differential equation with constant coefficients is

$$y = c_1 e^x + c_2 x e^x$$

Construct the equation.

এটা দ্বিঘাতৰ ধ্ৰুৱক সহগবিশিষ্ট সমমাত্ৰিক অৱকল সমীকৰণৰ সাধাৰণ সমাধান হ'ল

$$y = c_1 e^x + c_2 x e^x$$

সমীকৰণটো সাজি উলিওৱা।

3. Answer any *four* of the following questions : 5×4=20

তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ যি কোনো চাৰিটাৰ উত্তৰ কৰা :

(a) Show that $5x^2y^2 - 2x^3y^2 = 1$ is an implicit solution of the differential equation

$$x\frac{dy}{dx} + y = x^3y^3$$

on the interval $0 < x < \frac{5}{2}$.

দেখুওৱা যে $0 < x < \frac{5}{2}$ অন্তৰালত $5x^2y^2 - 2x^3y^2 = 1$ টো $x\frac{dy}{dx} + y = x^3y^3$ অৱকল সমীকৰণৰ এটা অন্তর্নিহিত সমাধান হয়।



( Turn Over )

(b) Determine the constant $A$ such that the equation

$$(x^2+3xy)\,dx+(Ax^2+4y)\,dy=0$$

is exact. Then solve the exact equation. 1+4=5

$(x^2+3xy)\,dx+(Ax^2+4y)\,dy=0$ অৱকল সমীকৰণটো যথাৰ্থ হোৱাকৈ $A$ ৰ মান উলিওৱা। যথাৰ্থ সমীকৰণটো সমাধান কৰা।

(c) Solve the Bernoulli equation :

বাৰ্ণৌলী সমীকৰণটো সমাধান কৰা :

$$x\frac{dy}{dx}+y=-2x^6y^4$$

(d) Solve the initial value problem :

প্ৰাৰম্ভিক মানযুক্ত সমস্যাটো সমাধান কৰা :

$$(x^2+1)\frac{dy}{dx}+4xy=x,\quad y(2)=1$$

(e) Given that $y=x$ is a solution of

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}-4x\frac{dy}{dx}+4y=0$$

Find a linearly independent solution by reducing the order.

$x^2\frac{d^2y}{dx^2}-4x\frac{dy}{dx}+4y=0$ অৱকল সমীকৰণটোৰ $y=x$ এটা সমাধান হয়। সমীকৰণটোৰ মাত্ৰা হ্ৰাস কৰি আনটো বৈখিকভাৱে স্বতন্ত্ৰ সমাধান উলিওৱা।

(f) Solve the Cauchy-Euler equation :

কচ্চি-ইউলাৰ সমীকৰণটো সমাধান কৰা :

$$3x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 4x\frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

(g) Solve the following initial value problem using method of undetermined coefficients :

অনিৰ্ণেয় সহগ পদ্ধতিৰে তলত দিয়া প্ৰাৰম্ভিক মানযুক্ত সমীকৰণটো সমাধান কৰা :

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 3y = 9x^2 + 4, \; y(0) = 6, \; y'(0) = 8$$

(h) Show that the function $f$ defined by $f(x) = (2x^2 + 2e^{3x} + 3)e^{-2x}$ satisfies the differential equation

$$\frac{dy}{dx} + 2y = 6e^x + 4xe^{-2x}$$

and also the condition $f(0) = 5$.

দেখুওৱা যে, $f(x) = (2x^2 + 2e^{3x} + 3)e^{-2x}$ৰে সংজ্ঞাবদ্ধ $f$ ফলনটোৱে অৱকল সমীকৰণ

$$\frac{dy}{dx} + 2y = 6e^x + 4xe^{-2x} \text{ ক}$$

সিদ্ধ কৰে আৰু লগতে $f(0) = 5$ চৰ্তও সিদ্ধ কৰে।

4. Answer any *two* of the following questions : 10×2=20

তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ যি কোনো দুটাৰ উত্তৰ কৰা :

(a) Show that the linear differential equation

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

has an integrating factor of the form $e^{\int P(x)\,dx}$ and a one-parameter family of solution

$$ye^{\int P(x)\,dx} = \int e^{\int P(x)\,dx} Q(x)\,dx + C$$

দেখুওৱা যে ৰৈখিক অৱকল সমীকৰণ

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \text{ ৰ}$$

এটা $e^{\int P(x)\,dx}$ আকৃতিৰ অনুকলন গুণক থাকে আৰু লগতে সমীকৰণটোৰ এটা একক প্ৰাচলযুক্ত সমাধানৰ পৰিয়াল হ'ল

$$ye^{\int P(x)\,dx} = \int e^{\int P(x)\,dx} Q(x)\,dx + C$$

(b) Solve by transforming to homogeneous equation :

সমমাত্ৰিক সমীকৰণলৈ ৰূপান্তৰ কৰি সমাধান কৰা :

$$(x - 2y + 1)\,dx + (4x - 3y - 6)\,dy = 0$$

(c) Consider the following differential equation :

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

(i) Show that $x$ and $x^2$ are linearly independent solutions of this equation on the interval $0 < x < \infty$.

(ii) Write the general solution of the equation.

(iii) Find the solution that satisfies the conditions $y(1) = 3$, $y'(1) = 2$. Explain why this solution is unique. 4+1+5=10

তলত দিয়া অৱকল সমীকৰণটো লোৱা :

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

(i) দেখুওৱা যে $0 < x < \infty$ অন্তৰালত $x$ আৰু $x^2$ সমীকৰণটোৰ দুটা ৰৈখিকভাৱে স্বতন্ত্ৰ সমাধান।

(ii) সমীকৰণটোৰ সাধাৰণ সমাধান লিখা।

(iii) $y(1) = 3$, $y'(1) = 2$ চৰ্ত দুটা সিদ্ধ কৰা সমাধানটো উলিওৱা। এই সমাধানটো কিয় একক, ব্যাখ্যা কৰা।

(d) Find the general solution using method of undetermined coefficients

$$\frac{d^4y}{dx^4}+\frac{d^2y}{dx^2}=3x^2+4\sin x-2\cos x$$

অনিৰ্ণেয় সহগ পদ্ধতিৰে সাধাৰণ সমাধান উলিওৱা

$$\frac{d^4y}{dx^4}+\frac{d^2y}{dx^2}=3x^2+4\sin x-2\cos x$$

(e) Solve by the method of variation of parameters

প্ৰাচলৰ তাৰতম্য পদ্ধতিৰে সমাধান কৰা

$$\frac{d^2y}{dx^2}+y=\cot x$$

★★★