Total number of printed pages-05

1(Sem-8/FYUGP)BNC(A)/DSCI

2024

MATHEMATICS

(Discipline Specific Core)

Paper Name: Classical Algebra

Paper Code: **MAT-DSC-141**

Full Marks: 60

Time: Two and Half Hours

(*The figures in the margin indicate full marks for the questions)*

Answer ***either*** *in English* ***or*** *in Assamese*

1. Answer the following questions: **1x7=7**

তলৰ প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ দিয়া-

(a) What is the polar representation of -1?

-1 ৰ ধ্ৰুৱীয় প্ৰকাশ কি ?

(b) $(\cos\theta + i\sin\theta)^{-5} = ?$

(c) Write the three cube roots of unity.

1 ৰ ঘনমূল তিনিটা লিখা ।

(d) What is monic polynomial?

মনিক বহুপদ ৰাশি কি ?

(e) Write True/False.

"An equation with rational co-efficient, irrational roots occur in conjugate pair".

সছা/মিছা লিখা –

"পৰিমেয় সহগযুক্ত এটা সমীকৰণৰ অপৰিমেয় মূলবোৰ সংযুক্ত আকাৰত থাকে"।

(f) If A is a square matrix, then show that $A+A^T$ is symmetric.

যদি A এটা বৰ্গাকাৰ মৌলকক্ষ, তেন্তে দেখুওৱা যে $A+A^T$ মৌলকক্ষটো সমমিত ।

(g) If A = [0 2 5], then find the rank of 3A.
যদি A = [0 2 5] হয় তেন্তে 3A ৰ ৰেংক কিমান হব ?

2. Answer the following questions: 2x4=8
তলৰ প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ দিয়া-

(a) Find LogZ and logZ if Z = i.
LogZ আৰু logZ নিৰ্ণয় কৰা যদি Z = i.

(b) Find the fourth root of 1.
1 ৰ 4-তম মূলবোৰ উলিওৱা ।

(c) Determine the possible number of positive and negative real roots of the equation.

$$2x^5-6x^4+x^3-6x^2+2x-1 = 0$$

তলত দিয়া সমীকৰনটোৰ ধনাত্মক আৰু ঋণাত্মক মূলৰ সাম্ভাব্য সংখ্যা নিৰ্ণয় কৰা ।

$$2x^5-6x^4+x^3-6x^2+2x-1 = 0$$

(d) Determine the unknown quantities in the expression

$$2\begin{bmatrix} x+2 & y+3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ y & z \end{bmatrix}^T$$

তলৰ প্ৰকাশ ৰাশিত থকা নজনা ৰাশিবোৰ নিৰ্ণয় কৰা :

$$2\begin{bmatrix} x+2 & y+3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ y & z \end{bmatrix}^T$$

3. Answer the following questions (any three) 5x3=15
তলৰ প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ দিয়া (যিকোনো তিনিটা)

(a) If $x = \cos\alpha + i\sin\alpha$, $y = \cos\beta + i\sin\beta$ and $z = \cos\gamma + i\sin\gamma$, then prove that

$$\cos(\beta-\gamma) + \cos(\gamma -\alpha) + \cos(\alpha-\beta) = 1$$

যদি $x = \cos\alpha + i\sin\alpha$, $y = \cos\beta + i\sin\beta$ আৰু $z = \cos\gamma + i\sin\gamma$,

প্ৰমাণ কৰা যে $\cos(\beta-\gamma) + \cos(\gamma -\alpha) + \cos(\alpha-\beta) = 1$

(b) Solve the equation $16x^4-64x^3+56x^2+16x-15 = 0$, whose roots are in A.P.

$16x^4-64x^3+56x^2+16x-15 = 0$ সমীকৰণটো সমাধান কৰা যদি মূলবোৰ সমান্তৰ প্ৰগতিত থাকে ।

(c) Prove that an algebraic equation of degree n has at most n roots.

প্ৰমাণ কৰা যে n ঘাতৰ বীজগণিতীয় সমীকৰণ এটাৰ সৰ্ব্বোচ্ছ n সংখ্যক মূল থাকে।

(d) Show that : দেখুওৱা যে :

$$i\log\left(\frac{x-i}{x+i}\right) = \pi - 2\tan^{-1}x$$

(e) Find A^{-1} if (A^{-1} উলিওৱা যদি)

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

(f) If A and B are non-singular matrices then prove that

(i) $(A^{-1})^{-1} = A$

(ii) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

যদি A আৰু B দুটা নন-চিংগুলাৰ মৌলকক্ষ হয়, প্ৰমাণ কৰা যে

(i) $(A^{-1})^{-1} = A$

(ii) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

4. Answer the following questions (any two) 10x3=30

তলৰ প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ দিয়া (যিকোনো দুটা)

(a) (i) State and prove De-Moivere's theorem for positive and negative integer index.

ধনাত্মক আৰু ঋণাত্মক অখন্দ সূচকৰ বাবে ডি মইভাৰৰ উপপাদ্যটো উক্তিটো লিখি প্ৰমাণ কৰা ।

(ii) If $\sin(\theta+i\phi) = \tan\beta + i\sec\beta$, then prove that

$$\cos2\theta\cosh2\phi = 3$$

যদি $\sin(\theta+i\phi) = \tan\beta + i\sec\beta$, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে

$$\cos2\theta\cosh2\phi = 3$$

(b) (i) If n is an intger, prove that

$$\left(\frac{1+sin\theta+icos\theta}{1+sin\theta-icos\theta}\right)^n = \cos\left(\frac{n\pi}{2}-n\theta\right)+i\sin\left(\frac{n\pi}{2}-n\theta\right)$$

যদি n এটা অখন্দ সংখ্যা, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে

$$\left(\frac{1+sin\theta+icos\theta}{1+sin\theta-icos\theta}\right)^n = \cos\left(\frac{n\pi}{2}-n\theta\right)+i\sin\left(\frac{n\pi}{2}-n\theta\right)$$

(ii) Find all complex numbers z such that exp z = -1

সকলো জটিল সংখ্যা z নিৰ্ণয় কৰা যাতে exp z = -1

(c) (i) Let A be an *n* x *n* matrix. Then show that the following statements are equivalent.

a. A^{-1} exists
b. Rank A = n
c. Ax = 0 implies that x = 0

ধৰা A এটা *n* x *n* মৌলকক্ষ । প্ৰমাণ কৰা যে তলত দিয়া বাক্য তিনিটা সমতুল্য:

a. A^{-1} স্হিত হয়
b. Rank A = n
c. Ax = 0 হলে x = 0 হব ।

(ii) Find the inverse of $\begin{bmatrix} 4 & 7 & 2 \\ 3 & 6 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}$ এই মৌলকক্ষটোৰ বিপৰীত মৌলকক্ষটো নিৰ্ণয় কৰা ।

(d) (i) Find the polynomial of lowest degree which vanishes at x = -1, 0, 1 and takes the value 12 at x=2

x = -1, 0, 1 মানত সমাপন হোৱা নিম্নতম ঘাতৰ বহুপদ ৰাশিটো নিৰ্ণয় কৰা যত বহুপদ ৰাশিটোৱে x=2 ৰ বাবে 12 মান লয় ।

(ii) Find k so that (1-i) is a root of $kx^2+2x+1 = 0$

k ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা যাতে (1-i) য়ে $kx^2+2x+1 = 0$ সমীকৰণটোৰ এটা মূল হয়।

(iii) Solve the equations:

সমাধান কৰা :

$$2x-y+3z = 0$$
$$3x+2y+z = 0$$
$$x-4y+5z = 0$$

(e) When does a homogeneous system of linear equations possess a unique solution and what is that unique solution, explain. Further, show that the following homogeneous system has infinitely many solution and obtain its general solution.

$$x+2y+z = 0$$
$$2x+4y+z = 0$$
$$x+2y-z = 0$$

ৰৈখিক সমীকৰণৰ এটা সমজাতীয় প্ৰণালী কেতিয়া একক সমাধানৰ অধিকাৰী হয় আৰু সেই একক সমাধানটো কি ? ব্যাখ্যা কৰা । ইয়াৰ ওপৰি দেখুওৱা যে তলত দিয়া সমজাতীয় প্ৰণালীটোৰ অসীম সংখ্যক সমাধান আছে, আৰু ইয়াৰ সাধাৰন সমাধান উলিওৱা :

$$x+2y+z = 0$$
$$2x+4y+z = 0$$
$$x+2y-z = 0$$

(f) Explain the Cardon's method of solution of cubic equation $ax^3+bx^2+cx+d = 0$

How can we study the nature of roots using this method?

$ax^3+bx^2+cx+d = 0$ ত্ৰিঘাতৰ সমীকৰণটো সমাধানৰ কাৰ্ডনৰ পদ্ধতিটো ব্যাখ্যা কৰা । এই পদ্ধতিৰ সহায়ত কেনেকৈ মূলবোৰৰ প্ৰকৃতি অধ্যয়ন কৰিব পাৰি ?

****