

Total number of printed pages-11

1 (Sem-2) MAT

2024

**MATHEMATICS**

Paper : MAT0200104

(Calculus)

Full Marks : 60

Time : 2½ hours

**The figures in the margin indicate full marks for the questions.**

**Answer either in English or in Assamese.**

1. Answer the following questions : 1×8=8

তলৰ প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ দিয়া :

(a) If  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 3$ , find the value of

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{5 + f(x)}.$$

যদি  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 3$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{5 + f(x)}$  অৰ মান

উলিওৱা।

Contd.

$$1 + x f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0)$$

- (b) State whether the statement is true or false, "The absolute value of a continuous function is continuous."

“অবিচ্ছিন্ন ফলন এটাৰ পৰম মানৰ ফলনটোত অবিচ্ছিন্ন।”  
উক্তিটো সঁচা নে মিছা লিখা।

- (c) Write the Maclaurin's series for  $e^x$ .

$e^x$ -অৰ মেক্লেৰিন শ্ৰেণীটো লিখা।

- (d) Can the intermediate value theorem be used to determine the number of roots within an interval?

এটা অন্তৰালত থকা মূলৰ সংখ্যা নিৰ্ধাৰণ কৰিবলৈ  
Intermediate value theorem ব্যৱহাৰ কৰিব  
পাৰি নে?

- (e) What is the  $n$ th derivative of  $x^n$ ?

$x^n$ -অৰ  $n$ -তম অৱকলজটো কি?

- (f) Write the value of  $\int_0^{\pi/2} \cos^8 x dx$ .

$\int_0^{\pi/2} \cos^8 x dx$  -ৰ মান লিখা।

(g) Write the domain of the function

$$f(x, y, z) = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}.$$

$f(x, y, z) = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$  ফলনটোৰ  
আদিক্ষেত্র লিখা।

(h) What is the slope of the surface  $z = xy^2$   
in the  $x$ -direction at the point  $(2, 3)$ ?

$z = xy^2$  পৃষ্ঠৰ  $(2, 3)$  বিন্দুত  $x$ -অৰ দিশত  
প্রৱণতা কিমান?

Answer **any six** questions :  $2 \times 6 = 12$

যিকোনো ছয়টাৰ উত্তৰ দিয়া :

(a) Find (মান উলিওৱা) :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^3 - x}{2x^3 - 5}$

(b) If the function  $f(x) = \begin{cases} kx^2 & , x \leq 2 \\ 2x + k & , x > 2 \end{cases}$

is continuous everywhere, then find the  
value of  $k$ .

যদি  $f(x) = \begin{cases} kx^2 & , x \leq 2 \\ 2x + k & , x > 2 \end{cases}$  ফলনটো সদায়েই

অবিচ্ছিন্ন, তেন্তে  $k$ -অৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

(c) State the squeezing theorem for the functions  $f$ ,  $g$  and  $h$ .

$f$ ,  $g$  আৰু  $h$  ফলনৰ বাবে স্কুইজিং উপপাদ্যটো লিখা।

(d) If (যদি)  $y = e^{a \sin^{-1} x}$ , prove that (প্রমাণ কৰা য়ে)

$$(1 - x^2)^2 y_2 - xy_1 - ay^2 = 0$$

(e) Evaluate (মান উলিওৱা) :

$$\int_0^a \frac{x^4}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx$$

(f) Verify Rolle's theorem for the function  $f(x) = x^2 + 1$  in the interval  $[-1, 1]$ .

$f(x) = x^2 + 1$  ফলনৰ  $[-1, 1]$  অন্তৰালত ৰ'লৰ উপপাদ্যৰ সত্যতা পৰীক্ষা কৰা।

(g) If  $w = \sqrt{x^2 + 4y^2 - z^2}$ , find  $\frac{\partial w}{\partial x}$  and  $\frac{\partial w}{\partial y}$  at point  $(2, 1, -1)$ .

যদি  $w = \sqrt{x^2 + 4y^2 - z^2}$ ,  $(2, 1, -1)$  বিন্দুত

$\frac{\partial w}{\partial x}$  আৰু  $\frac{\partial w}{\partial y}$  অৰ মান উলিওৱা।

(h) Define homogeneous function. State Euler's theorem on homogeneous function. 1+1=2

সুযম ফলনৰ সংজ্ঞা লিখা। সুযম ফলনৰ বাবে ইউলাৰৰ উপপাদ্যটো লিখা।

(i) If  $f(x) = x^5 + 3x^3 + x^2 + 1$ , find  $\frac{d^3 f}{dx^3}$  when  $x = 0$ .

$f(x) = x^5 + 3x^3 + x^2 + 1$  ফলনৰ  $x = 0$  বিন্দুত

$\frac{d^3 f}{dx^3}$ -ৰ মান নির্ণয় কৰা।

(j) Show that (দেখুওৱা যে)

$$\frac{x}{1+x} < \log(1+x), x > 0$$

3. Answer **any four** questions : 5×4=20

যিকোনো চাৰিটা প্ৰশ্নৰ উত্তৰ দিয়া :

(a) (i) Find (মান নির্ণয় কৰা) :

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{2-x}{(x-4)(x+2)} \quad 2$$

(ii) Show that (দেখুওৱা যে)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2 + 2x} \right) = \frac{1}{2}$$

3

(b) If  $f(x) = \begin{cases} \frac{xe^{1/x}}{1+e^{1/x}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

show that  $f$  is not derivable at  $x=0$ .

যদি  $f(x) = \begin{cases} \frac{xe^{1/x}}{1+e^{1/x}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

দেখুওৱা যে  $x=0$  বিন্দুত  $f$  ফলনটো অৱকলনীয় নহয়।

→(c) State and prove Leibnitz theorem.

1+4=5

লীবনিটজৰ উপপাদ্যটোৰ উক্তি লিখি প্ৰমাণ কৰা।

→(d) If  $I_n = \int_0^{\pi/3} \tan^n x dx$ , show that

$$(n-1)(I_n + I_{n-2}) = (\sqrt{3})^{n-1}$$

যদি  $I_n = \int_0^{\pi/3} \tan^n x dx$  হয়, দেখুওৱা যে

$$(n-1)(I_n + I_{n-2}) = (\sqrt{3})^{n-1}$$

(e) Expand  $\log(1+x)$  by Maclaurin's theorem.

মেক্‌ল'বিনৰ উপপাদ্য ব্যৱহাৰ কৰি  $\log(1+x)$  ক বিস্তাৰিত কৰা।

(f) Write Taylor's polynomial for a function  $f$ . Find the  $n$ th Taylor's polynomial for  $\frac{1}{x}$  and express it in sigma notation.

$$2+2+1=5$$

ফলন  $f$ -ৰ বাবে টয়লৰছৰ বহুপদ বাশিটো লিখা।  $\frac{1}{x}$

অৰ বাবে টয়লৰছৰ  $n$ তম বহুপদ বাশিটো লিখা আৰু ইয়াক ছিগ্‌মাৰ সহায়ত প্ৰকাশ কৰা।

(g) Sketch the level surface of

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2.$$

$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$  ফলনটোৰ পৃষ্ঠস্তৰ অংকন কৰা।

(h) If  $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ , show that

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x}.$$

যদি  $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ , তেন্তে দেখুওৱা যে

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x}$$

4. Answer **any two** of the following questions :

10×2=20

তলৰ প্ৰশ্নৰ যিকোনো দুটাৰ উত্তৰ দিয়া :

(a) (i) Find (মান নিৰ্ণয় কৰা) : 5

$$(1) \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{h^2 + 4h + 5} - \sqrt{5}}{h}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 3x} - x)$$

(ii) If the function

$$f(x) = \begin{cases} ax + 2b & , x \leq 0 \\ x^2 + 3a - b & , 0 < x \leq 2 \\ 3x - 5 & , x > 2 \end{cases}$$

is continuous everywhere, then find the values of the constants  $a$  and  $b$ . 5

$$f(x) = \begin{cases} ax + 2b & , x \leq 0 \\ x^2 + 3a - b & , 0 < x \leq 2 \\ 3x - 5 & , x > 2 \end{cases}$$

ফলনটো সদায়েই অবিচ্ছিন্ন হলে  $a$  আৰু  $b$ -অৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।



(b) Obtain the reduction formula for

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x dx. \text{ Using it evaluate—}$$

$$(i) \int_0^{\pi/2} \sin^5 x dx$$

$$(ii) \int_0^{\pi/2} \sin^{10} x dx$$

$$6+2+2=10$$

$\int_0^{\pi/2} \sin^n x dx$  -ৰ হ্রাসমান সূত্র উলিওৱা। ইয়াৰ ব্যৱহাৰ কৰি মান উলিওৱা :

$$(i) \int_0^{\pi/2} \sin^5 x dx$$

$$(ii) \int_0^{\pi/2} \sin^{10} x dx$$

(c) State and prove Lagrange's Mean value theorem. What is its geometrical interpretation? Verify mean value theorem for function

$$f(x) = x(x-1)(x-2) \text{ in } \left[0, \frac{1}{2}\right].$$

$$1+4+2+3=10$$

লাগ্ৰাঞ্জৰ মধ্যমান উপপাদ্যটোৰ উক্তি লিখি প্ৰমাণ কৰা।

ইয়াৰ ভৌতিক অৰ্থ কি?  $f(x) = x(x-1)(x-2)$

ফলনটোৰ  $[0, \frac{1}{2}]$  অন্তৰালত উপপাদ্যটোৰ সত্যতা  
পৰীক্ষা কৰা।

(d) (i) Prove that if a function  $f$  is differentiable at  $x_0$ , then  $f$  is continuous at  $x_0$ . Is converse of the theorem true?  $3+1=4$

প্ৰমাণ কৰা যে ফলন  $f$ ,  $x_0$  বিন্দুত অৱফলনীয়  
হলে  $f$  ফলনটো  $x_0$  বিন্দুত অবিচ্ছিন্ন হয়।  
উপপাদ্যটোৰ বিপৰীত উক্তিটো সঁচা নে?

(ii) For  $y = \cos(m \sin^{-1} x)$ , show that

$$y_n(0) = \begin{cases} 0, & \text{if } n \text{ is odd} \\ m^2(2^2 - m^2)(4^2 - m^2) \dots \{(n-2)^2 - m^2\}, & \text{if } n \text{ is even.} \end{cases}$$

6

$y = \cos(m \sin^{-1} x)$ -ৰ কাৰণে দেখুওৱা যে,

$$y_n(0) = \begin{cases} 0, & \text{যদি } n \text{ অযুগ্ম হয়} \\ m^2(2^2 - m^2)(4^2 - m^2) \dots \{(n-2)^2 - m^2\}, & \text{যদি } n \text{ যুগ্ম হয়।} \end{cases}$$

- (e) (i) Let  $f(x, y) = \sqrt{y+1} + \ln(x^2 - y)$ .  
Find  $f(e, 0)$  and sketch the natural domain of  $f$ . 1+4=5

ধৰা হ'ল  $f(x, y) = \sqrt{y+1} + \ln(x^2 - y)$ ।  
 $f(e, 0)$  মান নিৰ্ণয় কৰা আৰু  $f$  ফলনটোৰ  
স্বাভাৱিক আদিক্ষেত্ৰ অংকন কৰা।

- (ii) If  $u = \log(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$ ,

show that 
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{3}{x+y+z}$$

5

যদি  $u = \log(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$ ,

দেখুওৱা যে 
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{3}{x+y+z}$$