29T MATH

2019

MATHEMATICS

Full Marks : 100

Pass Marks : 30

Time : Three hours

The figures in the margin indicate full marks for the questions.

Q. No. 1 (a–j) carries 1 mark each	1×10 = 10
Q. Nos. 2–13 carry 4 marks each	4×12 = 48
Q. Nos. 14–20 carry 6 marks each	6×7 = 42
	Total = 100

1. Answer the following questions : $1 \times 10 = 10$

তলৰ প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ লিখা :

(a) Let $A = \{x : 1 < x < 10, x \text{ is an odd natural number}\}$ and $B = \{y : 90 < y < 100, y \text{ is a prime number}\}$. Write the number of relations from A to B. 1

ধৰা হ'ল $A = \{x : 1 < x < 10,\ x$ এটা অযুগ্ম স্বাভাৱিক সংখ্যা $\}$ আৰু $B = \{y : 90 < y < 100,\ y$ এটা মৌলিক সংখ্যা $\}$। A ৰ পৰা B লৈ হোৱা সম্বন্ধৰ সংখ্যা লিখা।

(b) Write down the range of $f(x) = cot^{-1} x$. 1

$f(x) = cot^{-1} x$ ফলনৰ পৰিসৰ লিখা।

(c) Find all the positive values of 2×2 determinants whose entries are from the set $\{-1, 0, 1\}$. 1

সংহতি $\{-1, 0, 1\}$ ৰ মৌল সমূহেৰে গঠিত 2×2 সাৰণিকবোৰৰ সকলো ধনাত্মক মান নিৰ্ণয় কৰা।

(d) Let A be a skew-symmetric matrix of odd order. Write the value of $|A|$. 1

ধৰা হ'ল A এটা অযুগ্ম মাত্ৰাৰ বিষম সমমিত মৌলকক্ষ। $|A|$ ৰ মান লিখা।

(e) Let A be a matrix of order 3, such that $|A| = -9$. Find the value of $\left|-3\,A^{-1}\right|$. 1

ধৰা হ'ল A এটা 3-মাত্ৰাৰ মৌলকক্ষ যʼত $|A| = -9$ । $\left|-3\,A^{-1}\right|$ ৰ মান নিৰ্ণয় কʼৰা।

(f) If $2^x = 3^y$, then find $\frac{dy}{dx}$. 1

যদি $2^x = 3^y$, তেন্তে $\frac{dy}{dx}$ নিৰ্ণয় কৰা।

(g) Evaluate $\int 2x f'(x^2)\,dx$. 1

$\int 2x f'(x^2)\,dx$ নিৰ্ণয় কৰা।

(h) Find the order and degree of the differential equation

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 7\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + 6y = 0.$$ 1

$\frac{d^2y}{dx^2} - 7\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + 6y = 0$ অৱকল সমীকৰণৰ ক্ৰম আৰু ঘাত নিৰ্ণয় কৰা।

(i) Write the interval in which the function $f(x) = \cos x$ is strictly decreasing. 1

$f(x) = \cos x$ ফলনটো কোনটো অন্তৰালত সতত হ্ৰাসমান হয় লিখা।

(j) Write the equation of the plane passing through (a, b, c) and parallel to xy-plane. 1

(a, b, c) বিন্দুৰ মাজেৰে যোৱা আৰু xy-সমতলৰ সমান্তৰাল হোৱা সমতলখনৰ সমীকৰণ লিখা।

2. Let the mapping $f(x) = ax + b$, $a > 0$, maps $[-1, 1]$ onto $[0, 2]$; show that $cot\left(cot^{-1} 7 + cot^{-1} 8 + cot^{-1} 18\right) = f(2)$. 4

ধৰা হ'ল ফলন $f(x) = ax + b$, $a > 0$ আৰু $[-1, 1]$ ৰ আচ্ছাদন প্ৰতিচিত্ৰ হ'ল $[0, 2]$; দেখুওৱা যে, $cot\left(cot^{-1} 7 + cot^{-1} 8 + cot^{-1} 18\right) = f(2)$.

OR / অথবা

Find the value of

$$cos^{-1} x + cos^{-1}\left\{\frac{1}{2}\left(x + \sqrt{3}\sqrt{1 - x^2}\right)\right\}, \quad \frac{1}{2} \le x \le 1.$$

$cos^{-1} x + cos^{-1}\left\{\frac{1}{2}\left(x + \sqrt{3}\sqrt{1 - x^2}\right)\right\}, \quad \frac{1}{2} \le x \le 1$ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

3. Let $f : R \to R$ is defined by $f(x) = 3x - 2$

and $g : R \to R$ is defined by $g(x) = \frac{x+2}{3}$.

Show that $f \cdot g = g \cdot f$. 4

ধৰা হ'ল $f : R \to R$ ক $f(x) = 3x - 2$ ৰে সংজ্ঞাবদ্ধ কৰা হৈছে আৰু $g : R \to R$ ক

$g(x) = \frac{x+2}{3}$ ৰে সংজ্ঞাবদ্ধ কৰা হৈছে।

দেখুওৱা যে, $f \cdot g = g \cdot f$.

4. Show that

$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3$$ 4

দেখুওৱা যে,

$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3$$

OR / অথবা

Without expanding show that

$$\begin{vmatrix} (a^x + a^{-x})^2 & (a^x - a^{-x})^2 & 2 \\ (b^x + b^{-x})^2 & (b^x - b^{-x})^2 & 2 \\ (c^x + c^{-x})^2 & (c^x - c^{-x})^2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

বিস্তাৰ নকৰাকৈ দেখুওৱা যে,

$$\begin{vmatrix} (a^x + a^{-x})^2 & (a^x - a^{-x})^2 & 2 \\ (b^x + b^{-x})^2 & (b^x - b^{-x})^2 & 2 \\ (c^x + c^{-x})^2 & (c^x - c^{-x})^2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

5. Show that the function f defined by $f(x)=|1-x+|x||,\ x \in R$ is a continuous function. 4

দেখুওৱা যে, $f(x)=|1-x+|x||,\ x \in R$ ৰে সংজ্ঞাবদ্ধ ফলন f, এটা অবিচ্ছিন্ন ফলন।

OR / অথবা

Discuss the applicability of Rolle's theorem to the function $f(x)=x^2+1$ on $[-2, 2]$.

ফলন $f(x)=x^2+1$, অন্তৰাল $[-2, 2]$ ত ৰলচ্ উপপাদ্যৰ প্ৰয়োগ আলোচনা কৰা।

6. If $y=\sqrt{e^{\sqrt{x}}}$, find $\frac{dy}{dx}$. 4

যদি $y=\sqrt{e^{\sqrt{x}}}$, তেন্তে $\frac{dy}{dx}$ নিৰ্ণয় কৰা।

7. If $y=\frac{1}{2}\cos^{-1}\left(\frac{1-4x^3}{1+4x^3}\right), \quad x \geq 0,$

find $\frac{dy}{dx}$. 4

যদি $y=\frac{1}{2}\cos^{-1}\left(\frac{1-4x^3}{1+4x^3}\right), \quad x \geq 0,$

তেন্তে $\frac{dy}{dx}$ ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

OR / অথবা

Determine the set of all points where the function $f(x) = x|x|$ is differentiable.

ফলন $f(x) = x|x|$ অৱকলনীয় হোৱাৰ বিন্দুসমূহৰ সংহতি নিৰ্ধাৰণ কৰা।

8. Evaluate $\int \frac{1}{x}\left(\frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}\right) dx$ 4

$\int \frac{1}{x}\left(\frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}\right) dx$ ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

OR / অথবা

Evaluate $\int \frac{\cos 8x + 1}{\tan 2x - \cot 2x} dx$.

$\int \frac{\cos 8x + 1}{\tan 2x - \cot 2x} dx$ ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

9. Evaluate $\int_0^1 \frac{3 - x^2}{(3 + x^2)^2} dx$. 4

$\int_0^1 \frac{3 - x^2}{(3 + x^2)^2} dx$ ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

OR / অথবা

Evaluate $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{1}{1+\sqrt{\tan x}}\,dx$

$\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{1}{1+\sqrt{\tan x}}\,dx$ ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

10. Solve the differential equation 4

$$x\frac{dy}{dx} + 2y = x^2 \log x$$

অৱকল সমীকৰণ $x\frac{dy}{dx} + 2y = x^2 \log x$ সমাধান কৰা।

11. If $y = 3\cos(\log x) + 4\sin(\log x)$,

show that $x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + y = 0$. 4

যদি $y = 3\cos(\log x) + 4\sin(\log x)$,

দেখুওৱা যে, $x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + y = 0$ ।

12. If $\vec{a} = 6\hat{i} + 8\hat{j}$ and $\vec{b} = 3\hat{j} + 4\hat{k}$ then determine the vector component of $\vec{a}$ along $\vec{b}$. 4

যদি $\vec{a} = 6\hat{i} + 8\hat{j}$ আৰু $\vec{b} = 3\hat{j} + 4\hat{k}$ তেন্তে $\vec{b}$ ৰ দিশত $\vec{a}$ ৰ ভেক্টৰ উপাংশ নিৰ্ণয় কৰা।

OR / অথবা

Find a unit vector perpendicular to each of the vectors $\vec{a}+\vec{b}$ and $\vec{a}-\vec{b}$, where $\vec{a}=3\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k}$ and $\vec{b}=\hat{i}+2\hat{j}-2\hat{k}$.

$\vec{a}=3\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k}$, $\vec{b}=\hat{i}+2\hat{j}-2\hat{k}$ তেন্তে $\vec{a}+\vec{b}$ আৰু $\vec{a}-\vec{b}$ দুয়োটা ভেক্টৰৰ ওপৰত লম্ব হোৱা একক ভেক্টৰ নিৰ্ণয় কৰা।

13. A natural number is selected at random from the set $A=\{x: 1\le x\le 50\}$. Find the probability such that the number satisfies the inequation $x^2-13x\le 30$. 4

সংহতি $A=\{x: 1\le x\le 50\}$ ৰ পৰা যাদৃশিক ভাবে এটা স্বাভাৱিক সংখ্যা নিৰ্বাচন কৰা হ'ল। সংখ্যাটোৱে অসমতা সমীকৰণ $x^2-13x\le 30$ সমাধান কৰাৰ সম্ভাৱিতা নিৰ্ণয় কৰা।

14. If $A=\begin{bmatrix} 0 & -\tan\frac{\alpha}{2} \\ \tan\frac{\alpha}{2} & 0 \end{bmatrix}$, then

show that $I+A=(I-A)\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$,

where I is the identity matrix of order 2. 6

যদি $A = \begin{bmatrix} 0 & -\tan\frac{\alpha}{2} \\ \tan\frac{\alpha}{2} & 0 \end{bmatrix}$, তেন্তে

দেখুওৱা যে, $I + A = (I - A)\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$,

য'ত I এটা 2 মাত্ৰাৰ একক মৌলকক্ষ।

OR / অথবা

If $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & -3 & -4 \end{bmatrix}$, then find A^{-1}; and hence solve the system of equations

$$x + 2y - 3z = -4$$
$$2x + 3y + 2z = 2$$
$$3x - 3y - 4z = 11$$

যদি $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & -3 & -4 \end{bmatrix}$, তেন্তে A^{-1} নিৰ্ণয় কৰা; আৰু

সমীকৰণ পদ্ধতি

$$x + 2y - 3z = -4$$
$$2x + 3y + 2z = 2$$
$$3x - 3y - 4z = 11$$

সমাধান কৰা।

15. Form the differential equation satisfied by $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$, where a and b are arbitrary constants. 6

$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ সমীকৰণে সিদ্ধ কৰা অবকলজ সমীকৰণ গঠন কৰা, য'ত a আৰু b ঐচ্ছিক ধ্ৰুবক।

OR / অথবা

Find the maximum and minimum values of the function $f(x)=x+\sin 2x$ on $[0, 2\pi]$.

$[0, 2\pi]$ অন্তৰালত $f(x)=x+\sin 2x$ ফলনৰ সৰ্বোচ্চ আৰু সৰ্বনিম্ন মান নিৰ্ণয় কৰা।

16. Prove that the area of a right angled triangle of a given hypotenuse is maximum when the triangle is isosceles. 6

প্ৰমাণ কৰা যে প্ৰদত্ত অতিভুজ বিশিষ্ট এটা সমকোণী ত্ৰিভুজৰ কালি সৰ্বোচ্চ হ'ব যেতিয়া ত্ৰিভুজটো সমদ্বিবাহু হ'ব।

OR / অথবা

Find the area of the smaller portion enclosed by the curves $x^2+y^2=9$ and $y^2=8x$.

$x^2+y^2=9$ আৰু $y^2=8x$ বক্ৰই আগুৰা সৰু অংশৰ কালি নিৰ্ণয় কৰা।

17. Find the shortest distance between the lines

$\vec{r} = 6\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k} + \lambda\left(\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}\right)$

and $\vec{r} = -4\hat{i} - \hat{k} + \mu\left(3\hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k}\right)$. 6

$\vec{r} = 6\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k} + \lambda\left(\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}\right)$ আৰু $\vec{r} = -4\hat{i} - \hat{k} + \mu\left(3\hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k}\right)$ ৰেখা দুডালৰ মাজৰ সৰ্বনিম্ন দূৰত্ব নিৰ্ণয় কৰা।

OR / অথবা

Find the equations of two lines through the origin which intersect the line $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-3}{1} = \dfrac{z}{1}$ at $\dfrac{\pi}{3}$.

মূলবিন্দুৰ মাজেৰে পাৰহৈ যোৱা $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-3}{1} = \dfrac{z}{1}$ ৰেখাডালক $\dfrac{\pi}{3}$ কোণত ছেদ কৰা ৰেখা দুডালৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰা।

18. Prove that $\left(\vec{a} - \vec{b}\right) \times \left(\vec{a} + \vec{b}\right) = 2\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)$. Hence find the area of the parallelogram whose diagonals are the vectors

$3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ and $\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$. 6

প্ৰমাণ কৰা যে $(\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{a}+\vec{b})=2(\vec{a}\times\vec{b})$। এতেকে ভেক্টৰ $3\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k}$ আৰু $\hat{i}-3\hat{j}+4\hat{k}$ কৰ্ণ বিশিষ্ট সমান্তৰিকৰ কালি নিৰ্ণয় কৰা।

OR / অথবা

Find the vector equation of the line passing through $(1, 2, 3)$ and parallel to the planes $\vec{r}.(\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k})=5$ and $\vec{r}.(3\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})=6$.

$(1, 2, 3)$ বিন্দুৰ মাজেৰে পাৰহৈ যোৱা আৰু $\vec{r}.(\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k})=5$ আৰু $\vec{r}.(3\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})=6$ সমতলৰ সমান্তৰাল ৰেখাৰ ভেক্টৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰা।

19. Solve the linear programming problem graphically. 6

লৈখিক নিয়মেৰে তলৰ ৰৈখিক প্ৰগ্ৰেমিং সমস্যাটোৰ সমাধান উলিওৱা।

Maximize $z=20x+15y$, subject to the conditions

$2x+y\le 200,$

$x+y\le 150$ and $x\ge 0,\ y\ge 0$.

$z=20x+15y$ ৰ সৰ্বোচ্চ মান উলিওৱা

য'ত,

$2x+y\le 200,$

$x+y\le 150$ আৰু $x\ge 0,\ y\ge 0$ ।

OR / অথবা

Maximize and minimize

$z = 5x + 2y$, subject to the conditions,

$$x - 2y \le 2,$$
$$3x + 2y \le 12,$$
$$-3x + 2y \le 3 \quad \text{and} \quad x \ge 0, \; y \ge 0.$$

$z = 5x + 2y$ ৰ সৰ্বোচ্চ আৰু সৰ্বনিম্ন মান উলিওৱা

য'ত

$$x - 2y \le 2,$$
$$3x + 2y \le 12,$$
$$-3x + 2y \le 3 \quad \text{আৰু} \quad x \ge 0, \; y \ge 0 \text{ ।}$$

20. Two numbers are selected at random from a set of first 90 natural numbers. Find the probability that the product of randomly selected numbers is divisible by 3. 6

প্ৰথম 90টা স্বাভাৱিক সংখ্যাৰ পৰা 2টা সংখ্যা যাদৃশিকভাৱে নিৰ্ব্বাচন কৰা হ'ল। যাদৃশিকভাৱে নিৰ্ব্বাচন কৰা সংখ্যা দুটাৰ গুণফল 3ৰে বিভাজ্য হোৱাৰ সম্ভাৱিতা নিৰ্ণয় কৰা।

OR / অথবা

In a 3×3 matrix, entries a_{ij} are selected randomly from the digits 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 with replacement where each element a_{ij} is a three digit number. Find the probability that each element in each row is divisible by 15.

এটা 3×3 মাত্ৰাৰ মৌলকক্ষৰ মৌলসমূহ a_{ij}ক অংক 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9ৰ পৰা পুনৰস্থাপিত হিচাবত যাদৃশিকভাৱে নিৰ্বাচন কৰা হৈছে, য'ত প্ৰত্যেক a_{ij} এটা তিনিটা অংক বিশিষ্ট সংখ্যা। প্ৰত্যেক শাৰীৰ প্ৰত্যেক মৌল 15ৰে বিভাজ্য হোৱাৰ সম্ভাৱিতা নিৰ্ণয় কৰা।

———×———