

λ আৰু μ -ৰ মানবোৰ উলিওৱা যাতে তলত দিয়া
সমীকৰণবোৰ

$$\begin{aligned}x + y + z &= 6 \\x + 2y + 3z &= 10 \\x + 2y + \lambda z &= \mu\end{aligned}$$

- (i) কোনো সমাধান নাথাকে।
(ii) এক অদ্বিতীয় সমাধান থাকে।
(iii) অসীম সংখ্যক সমাধান থাকে।

(c) If A is an invertible matrix, then show that A^T is invertible and $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$. 5

যদি A এটা প্ৰতিলোমনীয় মৌলকক্ষ হয়, তেনেহ'লে দেখুওৱা যে A^T ও প্ৰতিলোমনীয় হ'ব আৰু $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

(d) Define the rank of a non-zero matrix. Find the rank of the following matrix by reducing it to the normal form : 5

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 & -1 \\ 1 & 4 & 5 & 1 \\ 1 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}_{3 \times 4}$$

এটা অশূন্য মৌলকক্ষৰ কোটিৰ সংজ্ঞা লিখা। Normal আকাৰত প্ৰকাশ কৰি উপৰত দিয়া মৌলকক্ষৰ কোটি নিৰ্ণয় কৰা।

2016

MATHEMATICS

(General)

Full Marks : 60

Time : 3 hours

The figures in the margin indicate full marks for the questions

Answer either in English or in Assamese

PART—I

(Marks : 7)

1. Answer the following questions : 1×7=7

তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ দিয়া :

(a) What is the order of the permutation group S_n ?

বিন্যাস সংঘ S_n -ৰ মাত্ৰা (order) কি?

(b) Give examples of two zero divisors in the ring $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.

$M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ বলয়ৰ দুটা শূন্য ভাজকৰ উদাহৰণ দিয়া।

(2)

(c) In a ring R , show that $a.0 = 0 \quad \forall a \in R$.
 R বলয় এটাত দেখুওৱা যে $a.0 = 0 \quad \forall a \in R$.

(d) Write True or False :

শুদ্ধ নে ভুল লিখা :

“The order of a subgroup H of a finite group G does not divide the order of G .”

“সসীম সংঘ G -ৰ উপসংঘ H -অৰ মাত্ৰা G -ৰ মাত্ৰাৰ উৎপাদক নহয়।”

(e) What is the rank of the following matrix?

নিম্নোক্ত মৌলকক্ষটোৰ কোটি কি হ'ব ?

$$\begin{pmatrix} I_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{m \times n}$$

(f) Write down the relation between the ranks of A and A^T .

A আৰু A^T মৌলকক্ষদুটাৰ কোটিৰ মাজৰ সম্পর্ক লিখা।

(g) When is a square matrix A said to be invertible?

এটা বর্গীয় মৌলকক্ষ A -ক কেতিয়া প্রতিলোমনীয় বুলি কোৱা হয় ?

(3)

PART—II

(Marks : 8)

2. Answer the following questions : 2×4=8

তলৰ প্রশ্নবোৰৰ উত্তৰ লিখা :

(a) Show that $(\mathbb{N}, +)$ is not a group.
দেখুওৱা যে $(\mathbb{N}, +)$ এটা সংঘ নহয়।

(b) What is a binary operation? Give an example.

দ্বৈত প্রক্রিয়া কি ? এটা উদাহৰণ দিয়া।

(c) Define an integral domain and give an example.

পূর্ণাংকীয় বাস্তব সংজ্ঞা লিখা। এটা উদাহৰণ দিয়া।

(d) Apply the elementary transformations C_{12} , $R_{12}(-1)$ to the following matrix :

তলত দিয়া মৌলকক্ষত C_{12} , $R_{12}(-1)$ elementary transformations কেইটা প্রয়োগ কৰা :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$$

(4)

PART—III

(Marks : 15)

3. Answer any three questions : 5×3=15

তলৰ যি কোনো তিনিটা প্ৰশ্নৰ উত্তৰ লিখা :

(a) Let \mathbb{Q}^+ be the set of all positive rational numbers. Define a binary operation $*$ on \mathbb{Q}^+ by

$$a * b = \frac{ab}{3}, \quad \forall a, b \in \mathbb{Q}^+$$

Show that $\langle \mathbb{Q}^+, * \rangle$ is an Abelian group.ধন পৰিমেয় সংখ্যাৰ সংহতি \mathbb{Q}^+ ত এটা দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়া $*$ তলত দিয়া ধৰণে বৰ্ণনা কৰা হ'ল :

$$a * b = \frac{ab}{3}, \quad \forall a, b \in \mathbb{Q}^+$$

দেখুওৱা যে $\langle \mathbb{Q}^+, * \rangle$ এটা এবেলীয় সংঘ।(b) For any subgroup H of a group G , show that

$$(i) aH \cap bH = \phi \text{ or } aH = bH, a, b \in G$$

$$(ii) G = \bigcup_{a \in G} aH$$

 G সংঘ এটাৰ উপসংঘ H . দেখুওৱা যে

$$(i) aH \cap bH = \phi \text{ নাইবা } aH = bH, a, b \in G$$

$$(ii) G = \bigcup_{a \in G} aH$$

(5)

(c) Let $f : G \rightarrow G'$ be a homomorphism and $k = \ker f$. Show that $K \trianglelefteq G$.যদি $f : G \rightarrow G'$ এটা সমৰূপতা হয় আৰু $k = \ker f$, তেনেহ'লে দেখুওৱা যে $K \trianglelefteq G$.

(d) Show that a finite integral domain is a field.

দেখুওৱা যে এটা সসীম পূৰ্ণাংকীয় বাহু এটা ক্ষেত্ৰ হয়।

(e) If A is a square matrix of order n , then show that

$$A \cdot \text{adj } A = (\text{adj } A) \cdot A = |A| I_n$$

যদি A এটা n মাত্ৰাৰ বৰ্গীয় মৌলিকক্ষ হয়, তেনেহ'লে দেখুওৱা যে

$$A \cdot \text{adj } A = (\text{adj } A) \cdot A = |A| I_n$$

PART—IV

(Marks : 30)

Answer either (a) and (b) or (c) and (d) from each of the following questions : 10×3=30

তলৰ প্ৰশ্নবোৰৰ পৰা হয় (a) আৰু (b) নহ'লে (c) আৰু (d) ৰ উত্তৰ দিয়া :

4. (a) Show that the set of all n -th roots of unity forms a cyclic group generated by

$$e^{\frac{2\pi i}{n}}$$

5

দেখুওৱা যে একৰ n -তম মূলৰ সংহতিটো এটা চক্ৰীয় সংঘ গঠন কৰে আৰু ইয়াৰ জনক $e^{\frac{2\pi i}{n}}$.

(6)

- (b) Let $N \trianglelefteq G$ and define $Y: G \rightarrow G/N$ by $y(x) = xN$ for every $x \in G$. Show that y is an onto homomorphism and also find the kernel of y . 5

ধৰা $N \trianglelefteq G$ আৰু $Y: G \rightarrow G/N$ ফলনটো সংজ্ঞাবদ্ধ কৰা হৈছে এনেদৰে : $y(x) = xN$, $x \in G$. প্রমাণ কৰা যে y এটা আচ্ছাদক সমৰূপতা আৰু লগতে $\ker y$ উলিওৱা।

- (c) Find the orders of all the elements of the group (G, \circ) , where $G = \{x \in \mathbb{C} : x^4 = 1\}$. 5

সংঘ (G, \circ) -ৰ প্ৰতিটো মৌলৰ মাত্ৰা উলিওৱা, য'ত $G = \{x \in \mathbb{C} : x^4 = 1\}$.

- (d) Show that intersection of two normal subgroups of a group G is a normal subgroup of G . 5

দেখুওৱা যে সংঘ G -ৰ দুটা normal উপসংঘৰ ছেদন আকৌ G -ৰ normal উপসংঘ হ'ব।

5. (a) Define a Boolean ring. Show that a Boolean ring is commutative. 5

বুলিয়ান বলয়ৰ সংজ্ঞা দিয়া। দেখুওৱা যে এটা বুলিয়ান বলয় ক্ৰমবিনিমেয় বলয় হয়।

- (b) Define a field and give an example. Show that a field is an integral domain. 5

ক্ষেত্ৰৰ সংজ্ঞা দি উদাহৰণ দিয়া। দেখুওৱা যে ক্ষেত্ৰ এটা পূৰ্ণাংকীয় বাহু হয়।

(7)

- (c) Let $\mathbb{Z}[i] = \{a+ib : a, b \in \mathbb{Z}, i^2 = -1\} \subseteq \mathbb{C}$. Show that $\mathbb{Z}[i]$ forms a commutative ring with unity under the operations of addition and multiplication of complex numbers. 5

ধৰা $\mathbb{Z}[i] = \{a+ib : a, b \in \mathbb{Z}, i^2 = -1\} \subseteq \mathbb{C}$. দেখুওৱা যে জটিল সংখ্যাৰ যোগ আৰু পূৰণ সাপেক্ষে $\mathbb{Z}[i]$ -এ এটা এককসহ ক্ৰমবিনিমেয় বলয় গঠন কৰে।

- (d) In a ring R , show that
বলয় এটা R -ত দেখুওৱা যে
(i) $a \cdot (-b) = (-a)b = ab$
(ii) $(-a)(-b) = ab \quad \forall a, b \in R$ 5

6. (a) If A and B are invertible square matrices of order n , then show that AB is invertible and $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. 5

যদি A আৰু B n মাত্ৰাৰ প্ৰতিলোমনীয় বৰ্গীয় মৌলকক্ষ হয়, তেন্তে দেখুওৱা যে AB প্ৰতিলোমনীয় আৰু $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

- (b) Find the values of λ and μ for which the system of equations

$$\begin{aligned} x + y + z &= 6 \\ x + 2y + 3z &= 10 \\ x + 2y + \lambda z &= \mu \end{aligned}$$

has (i) no solution, (ii) unique solution, (iii) infinite number of solutions. 5